XXVII. Erdélyi Magyar Matematikaverseny
Nagyvárad, 2017. február 23 –26.

II. forduló - 9. osztály

1. feladat:

Az ABC háromszög oldalainak hossza rendre az a, b, c pozitív valós számok. Ha fennáll az

$\frac{a}{\sqrt{6}}+\frac{b}{\sqrt{3}}+\frac{c}{\sqrt{2}} \geq \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ egyenlőtlenség, igazold, hogy a háromszög derékszögű!

Vass Csilla, Sepsiszentgyörgy

2. feladat:

Az ABC háromszög AB és AC oldalát felosztjuk n egyenlő részre, $n \geq 2$. Az osztópontokat az A-tól kiindulva az AB oldalon $B_1, B_2, ..., B_{n-1}$, illetve az AC oldalon $C_1, C_2, ..., C_{n-1}$-el jelöljük.

a) Igazold, hogy a $\overrightarrow{B_1C_{n-1}}+\overrightarrow{B_2C_{n-2}}+...+\overrightarrow{B_{n-1}C_1}$ összegvektor és a $\overrightarrow{BC}$ vektor kollineáris.

b) A $[B_1C_{n-1}]$ szakaszon felvesszük az M_1 pontot, a $[B_2C_{n-2}]$-n az M_2 pontot, … , a $[B_{n-1}C_1]$ szakaszon pedig az M_{n-1} pontot úgy, hogy $\frac{B_kM_k}{M_kC_{n-k}}=\frac{k}{n-k}$, bármely $k=\overline{1,n-1}$ esetén. Határozd meg a $\sum_{k=1}^{n-1}\overrightarrow{AM_k}$ összeget.

Mészár Julianna, Nagyszalonta

3. feladat:

Adott az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat úgy, hogy $a_1=0,\ a_2=1$ és az $a_n,\ a_{n+1},\ a_{n+2}$ számok minden n páratlan számra számtani haladványban és minden n páros számra mértani haladványban vannak. Igazold, hogy $\sum_{k=2}^{n}\frac{k^2}{a_{2k-1}\cdot a_{2k}}=\frac{n-1}{n}$.

dr. Bencze Mihály, Bukarest

4. feladat:

Igazold, hogy $\left[\sqrt{1}\right]+\left[\sqrt{3}\right]+\left[\sqrt{5}\right]+\left[\sqrt{7}\right]+...+\left[\sqrt{4n^2+4n-1}\right]=\frac{n(n+1)(8n+1)}{3}$, bármely $n\in\mathbb{N}^*$, ahol $[x]$ az x valós szám egész részét jelöli.

dr. Bencze Mihály, Bukarest

Megjegyzések:
- munkaidő 3 óra;
- minden feladat helyes megoldása 10 pontot ér;
- lényeges általánosításokért és az elsőtől lényegesen különböző megoldásokért egy feladatra legfeljebb 5 pluszpont jár