

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Test 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Minden feladat megoldása kötelező. Hivatalból jár 10 pont.
- Effektiv munkaidő 3 óra

I FELADATSOR

(30 pont)

- 5p 1. Számítsátok ki az $(a_n)_{n \geq 1}$ számtani haladvány első öt tagjának összegét, ha $a_1 = 5$ és a különbség $r = 2$.
- 5p 2. Határozzátok meg azoknak az a valós számoknak a halmazát, amelyekre az $x^2 - ax + a - 1 = 0$ egyenletnek különböző valós megoldásai vannak.
- 5p 3. Oldjátok meg a valós számok halmazán a $3 - \sqrt[3]{x^2 + x + 2} = 1$ egyenletet.
- 5p 4. Számítsátok ki $2C_4^3 - 3V_4^2$.
- 5p 5. Adottak az $\vec{u} = \vec{i} + a\vec{j}$ és $\vec{v} = 2\vec{i} + (a^2 + 1)\vec{j}$ vektorok, ahol a valós szám. Határozzátok meg azt az a valós számot, amelyre az \vec{u} és \vec{v} vektorok kollineárisak.
- 5p 6. Adott az ABC hegyesszögű háromszög, ahol $AB = 8$, $BC = 8$ és a területe 16. Határozzátok meg a B szög mértékét.

II FELADATSOR

(30 pont)

1. Adottak az $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ és $M(x, y) = xI_2 + yA$ mátrixok, ahol x és y valós számok.
- 5p a) Igazoljátok, hogy $\det A = -1$.
- 5p b) Igazoljátok, $M(x, y) \cdot M(a, b) = M(xa + yb, xb + ya)$, bármely a, b, x és y valós szám esetén.
- 5p c) Határozzátok meg az (x, y) valós számpárokat, tudva azt, hogy $\det(M(x, y)) = 4$ és az $M(x, y) \cdot M(x, y)$ mátrix elemeinek összege 8-al egyenlő.
2. A valós számok halmazán értelmezzük az $x * y = x + y - 1$ és $x \circ y = xy - x - y + 2$ műveleteket.
- 5p a) Igazoljátok, hogy $2 \circ (1 * 3) = (2 \circ 1) * (2 \circ 3)$.
- 5p b) Határozzátok meg azokat az x valós számokat, amelyekre $3^{x \circ x} = \left(\frac{1}{9}\right)^{x * x}$.
- 5p c) Határozzátok meg azokat az x, y valós számokat, amelyekre $(x - 1) * (2y + 1) = 2$ és $(x + y) \circ 4 =$

III FELADATSOR

(30 pont)

1. Legyen az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 5x - 3, & x \in (-\infty, 1) \\ x^2 - x + \sqrt{x^2 + 3}, & x \in [1, +\infty) \end{cases}$.
- 5p a) Igazoljátok, hogy az f függvény folytonos \mathbb{R} -en.
- 5p b) Igazoljátok, hogy bármely a , $a > 1$ valós szám esetén a függvény grafikonjának $A(a, f(a))$ pontján keresztül a grafikus képéhez húzott érintő **nem** párhuzamos az Ox tengellyel.
- 5p c) Bizonyítsátok be, hogy az f függvény konvex az $(1, +\infty)$ intervallumon.
2. Tekintsük az $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x} + x + 1$, és $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{\sqrt{x} + 2x}{2x}$ függvényeket.
- 5p a) Bizonyítsátok be, hogy az f függvény a g függvény egy primitív függvénye.

- 5p** b) Számítsátok ki $\int_1^4 g(x)dx$ értékét.
- 5p** c) Határozzátok meg azt az m , $m > 1$, valós számot, amelyre $\int_1^m f(x)g(x)dx = 20$.